Mathématiques Spécialité

Terminale 1 et Terminale 3

Le samedi 12-10-2024

Durée 4h

Calculatrice autorisée

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. **a.** Démontrer que $u_1 = 12$.
   b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
   c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n+1.$$

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   Donner sa raison et son premier terme v_0.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

   d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.
   a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
   b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

Exercice

Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.
   Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout rentier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3 000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX^{e} siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.
   a. Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b. Déterminer la limite de P_n.
2. Dans cette question $b = 0{,}2$.
   a. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0{,}1 \times P_n$.
   Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.
   b. Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

Exercice

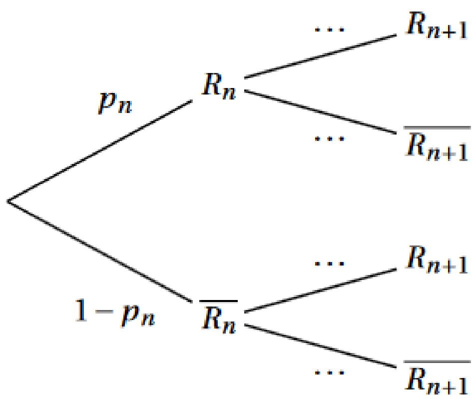
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »,
- p_n la probabilité de l'évènement R_n. On considère que $p_0 = 0,6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 0,75$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Démontrer que, pour tout entier n naturel n :

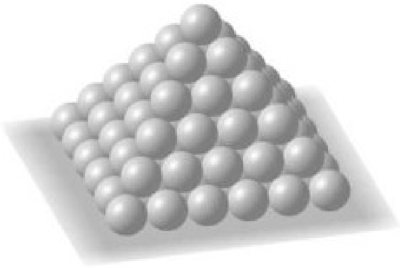
$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

d. Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Exercice

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :



- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules;
- le 3e étage possède 9 boules;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

a. Calculer S_5 et interpréter ce résultat.

b. On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.

Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = ...
    return ...
```

c. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible?